

## РАЗДЕЛ I МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 621.777: 621.984.5

Александров А. А.

### О «ЗОЛОТОЙ» ПРОПОРЦИИ И ГЕОМЕТРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

В инженерной практике для осуществления расчетов процессов пластического деформирования металла применяются методы верхней (МВО), нижней оценки (МНО) и линий скольжения (МЛС), основанные на энергетических теоремах [1–6].

Качанов Л. М. в работе [1] указывает на особое значение экстремальных теорем, которые открывают путь прямого построения решений, минуя интегрирование дифференциальных уравнений. Отмечая при этом, что сложно получить хорошие оценки и ещё труднее указать приемы последовательного сближения верхней и нижней оценки.

Колмогоров В. Л. отмечает [4], «что пока еще не сформулированы теоремы, показывающие рубеж, за которым решение рассматриваемых ... задач перестает быть единственным».

Отмечая, что в работах по теории пластичности, механике твердого деформируемого тела и обработки металлов давлением явно не указывается на связь результатов предельных решений задач с «золотой» пропорцией, покажем ее наличие, а также приемы, позволяющие дополнить и уточнить известные решения.

Для этого рассмотрим процессы плоской деформации, а именно, волочение (прессование) полосы через симметричную клиновую матрицу и осадку тупого клина, проведем анализ оптимизационных результатов и замкнутых решений, полученных на основе МНО [2], МВО [3] и МЛС [4] с использованием разрывных полей напряжений и скоростей в виде треугольных блоков.

Целью данной работы является анализ предельных решений задач плоской деформации по осадке клина и деформированию полосы в клиновой матрице методами линий скольжения, верхней и нижней оценки, а также сопоставление полученных результатов.

При расчетах процессов деформации МВО [1–3] деформируемую заготовку разделяют на жесткие блоки, которые могут скользить друг относительно друга, преодолевая силу трения. Это позволяет определять верхнюю оценку удельной силы деформирования  $p$ , как сумму её составляющих, вычисляемых на линиях разрыва скоростей между блоками  $p_{ij}$  внутри заготовки и на поверхностях контакта заготовки с инструментом  $p_j$ :

$$p = \sum t_s p_{ij} + \sum t_k p_i = t_s \left( \frac{l_{ij}}{h_0} \cdot \frac{V_{ij}}{V_0} \right) + t_k \left( \frac{l_i}{h_0} \cdot \frac{V_i}{V_0} \right),$$

где  $t_s$  – предел текучести металла на сдвиг;  $t_k$  – контактное касательное напряжение,  $t_k = mt_s$ ,  $m$  – коэффициент трения ( $0 \leq m \leq 1$ );  $l_{i,j}$  – длина стороны между блоками  $i$  и  $j$ ;  $l_i$  и  $l_j$  – длины сторон  $i$ -го и  $j$ -го блоков параллельные линиям тока в этих треугольных блоках,  $V_i$  и  $V_j$  – скорости блоков  $i$  и  $j$ ,  $V_0$  – скорость деформирующего инструмента.

Работнов Ю. Н. в [3] для получения верхней оценки на основе экстремальных принципов теории идеальной пластичности, применяет этот метод к задачам о плоской деформации. В задаче о протяжке полосы в гладкой клиновой матрице ( $\mu = 0$ ) используется простейшая кинематическая схема, представленная на рис. 1 ввиду симметрии процесса ее половинной. Зона пластической деформации имеет вид треугольного блока, одна из вершин которого находится на оси симметрии.

Полученное уравнение для нахождения минимальных значений полной мощности процесса имеет вид:

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \sqrt{h} + \frac{1}{\sqrt{h}} \right) - 2ctg \alpha, \quad (1)$$

где  $k$  – пластическая постоянная материала;  $\alpha$  – угол клина матрицы;  $h$  – половина толщины полосы после деформации.

Обратим внимание, что при любом угле гладкой матрицы минимум силы достигается, когда высота очага деформации  $h_2$  равна среднегеометрической величине от значений толщины полосы до и после деформации. На рис. 2 представлены, взятые из [3], графики зависимости  $p/2k$  от степени редукции для различных углов матрицы, построенные по (1).

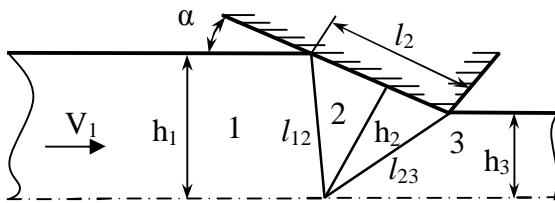


Рис. 1. Расчетная схема

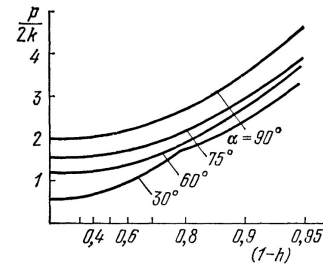


Рис. 2. Графики относительной удельной деформирующей силы в зависимости от обжатия и угла клина матрицы при  $\mu = 0$  [3]

Рассмотрим некоторые результаты данного оптимизационного решения.

Обратим внимание (рис. 2) на добавочную величину  $p/2k$  от 0 до 2 при нулевом обжатии в интервале изменения угла матрицы от 0 до 90 градусов, которую можно интерпретировать, как затраты энергии на поворот при прохождении линий разрыва скоростей. На рис. 3 показан график изменения добавочной величины  $p/2k$  в зависимости от угла матрицы.

На рис. 4 представлен типовой вид расчетных кривых составляющих относительной удельной силы деформирования в зависимости от положения вершины (расстояния от выходного сечения) при деформировании заготовки в гладкой матрице ( $\mu = 0$ ). Обе кривые имеют одинаковый минимум, что обусловлено симметричностью задаваемых условий. Расстояние между минимумами равно длине границы между матрицей и деформируемой заготовкой. Число, определяющее минимум, соответствует добавочной величине  $p/2k$  при  $\varepsilon = 0$  и равно  $2 \cdot tg(\alpha/2)$ . Это число можно представить, например, в виде:

$$2\sqrt{(1 - \cos \alpha)/(1 + \cos \alpha)}; \quad (2)$$

$$2(1 - \cos \alpha)/\sin \alpha; \quad (3)$$

$$2ctg \alpha (\sqrt{tg^2 \alpha + 1} - 1). \quad (4)$$

Поведение функций (2–4) наглядно представлено на рис. 5 путем расширения пространства результата решения, показанного на рис. 3. Преобразованием в другую систему координат, изображенная на рис. 3 кривая приобретает вид удвоенной строфоиды (рис. 6). Максимум кривой соответствует значению  $2\Phi^{5/2}$ , где  $\Phi$  – число Фидия,  $\Phi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,6180339\dots$

Записывая (1) в виде:

$$\frac{p}{2k} = \frac{1}{\sin \alpha} \left( \sqrt{1-e} + \frac{1}{\sqrt{1-e}} \right) - 2ctg \alpha,$$

при подстановке  $e = (h_1 - h_3)/h_1 = \Phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ , получим  $\frac{p}{2k} = 1$ .

Представленные ниже результаты решения задач МВО получены с применением следующих уравнений для вычисления составляющих удельной деформирующей силы на линиях разрыва скоростей треугольных блоков [8]:

$$p_i = t_k \frac{l_i}{h_i}; \quad p_{ij} = t_s \frac{l_{ij}^2}{h_i \cdot h_j} \sin \alpha,$$

где  $l_{ij}$  – длины границ между блоками  $i$  и  $j$ ;  $l_i$  и  $l_j$  – длины сторон  $i$ -го и  $j$ -го блоков параллельные линиям тока в этих треугольных блоках;  $h_i$  и  $h_j$  – высоты блоков;  $\alpha$  – угол поворота линии тока на границе блоков  $i$  и  $j$ .

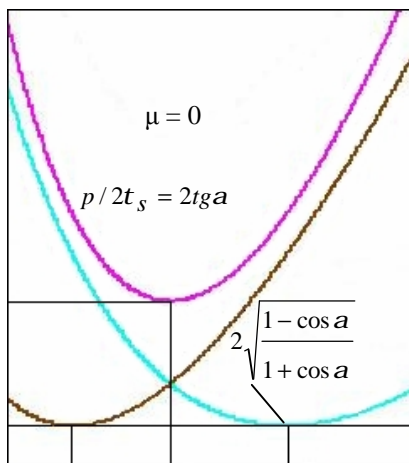


Рис. 3. Примерный вид расчетных кривых минимальной силы ( $\mu = 0$ )

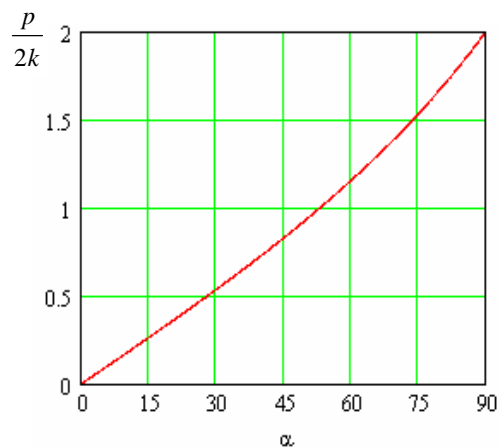


Рис. 4. Затраты  $p/2k$  на поворот

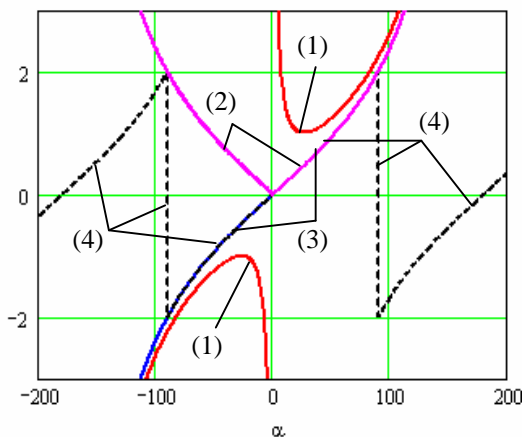


Рис. 5. Кривые оптимального решения

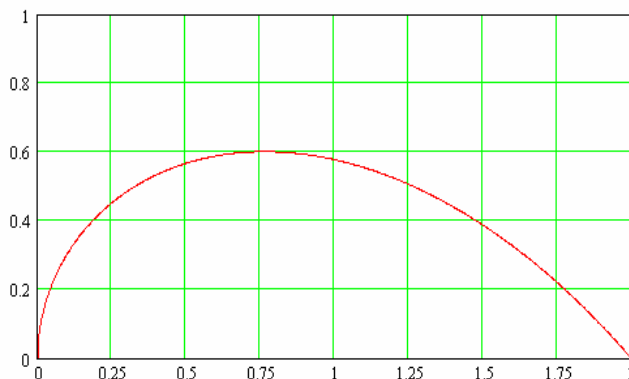


Рис. 6. Удвоенная строфоида

При решении задачи о деформации полосы в клиновой матрице в работе [8] получено, что при угле матрицы, определяемом из выражения:

$$\cos \alpha = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_1 \cdot h_3}{m \cdot (h_1^2 - h_3^2) + (h_1 + h_3)^2}}, \tag{5}$$

величина удельной силы описывается уравнением:

$$p_{opt} = 2t_s \sqrt{\frac{(h_1 - h_3)^2 + m(h_1^2 - h_3^2)}{h_1 h_3}} = 4t_s tga. \tag{6}$$

Данное решение согласуется с результатами, приведенными в [8]. Геометрические условия, отвечающие (5) представлены на рис. 4. Используя их можно получить графическое отображение пространства оптимизационного решения. Отметим также возможность определения графическим путем коэффициента  $\mu$ , соответствующего оптимуму.

Нижняя оценка величины деформирующей силы полученная решением этой задачи для гладкой матрицы с использованием кругов Мора в работе [5]:

$$p = 2k(1 + \sin a)r, \quad (7)$$

где  $r = (h_1 - h_3)/h_1$ .

Расчеты по (6) и (7) показывают, что для МВО усилия минимальны, а для МНО напряжения максимальны при одинаковых геометрических соотношениях матрицы и очага деформации (рис. 3, а). В этом случае выражение (7) можно записать:

$$p = 2k(1 + \sin a)r = 4k \sin a. \quad (8)$$

Сравнение (6) и (8) показывает видно, что расхождение определяется функцией угла.

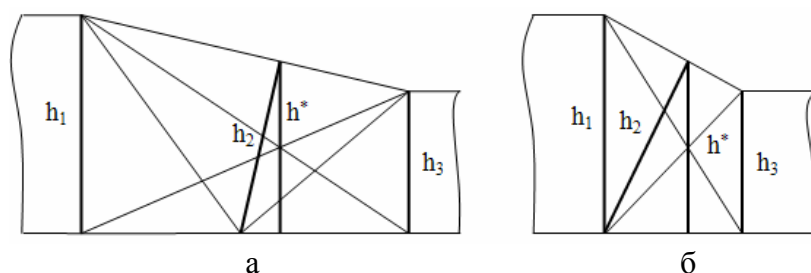


Рис. 7. Геометрические построения по результатам оптимизационного решения [11]: а – при  $\mu = 0$ ; б – при  $\mu = 1$

Особенностью МВО является возможность построения годографа скоростей для вычисления значения скорости каждого в рассматриваемом случае треугольного блока. Приведенный сравнительный анализ результатов решений показывает, еще одну особенность для данной схемы деформации, а именно возможность совмещения (наложения) плоскостей напряжений, годографа скоростей и физической плоскости.

В плоскости годографа скоростей (рис. 8) изображены кривые, соответствующие полному минимуму удельной силы при заданной величине обжатия. Из рис. 8 видно, что полученные кривые являются гипоциклоидами, т. е. кривыми третьего порядка. Форма петли, образуемой левой ветвью кривой, изменяется от строфоиды при  $\mu = 0$  до окружности при  $\mu = 1$ .

Известно, что подобные кривые находят применение при расчетах в аэродинамике [10]. Однако существенным отличием является то, что эти ветви (уходящие в бесконечность) как правило, не рассматриваются.

Значения максимумов левых ветвей гипоциклоид при  $0 \leq \mu \leq 1$ , определяемые кубическим уравнением «золотой» пропорции, показаны на рис. 9. Действительные корни кубического уравнения, определяющего значения максимумов, равны:  $1$ ;  $3/2 + 1/2 \cdot \sqrt{5} \approx 2,618034$ ;  $3/2 - 1/2 \cdot \sqrt{5} \approx 0,381966$ . Следовательно, уравнение может быть записано в следующем виде:

$$m(x) = (x - 1) \cdot [x - (1,5 + \sqrt{5} / 2)] \cdot [x - (1,5 - \sqrt{5} / 2)].$$

В дополнение заметим, что оптимизационное решение аналогичной задачи МВО для гладкой конической матрицы (без учета затрат на деформацию внутри пластической зоны) дает результаты полностью совпадающие с плоской задачей, т. е. также связано с «золотой» пропорцией.

Отмечая, что в литературе не встречено решение задачи МВО по осадке тупого клина с простейшей кинематической схемой, приведем результаты такого решения и сопоставим их с известными результатами, полученными МНО и МЛС.

Уравнение для определения верхней оценки относительной удельной силы необходимой для осадки клина, согласно схеме процесса, показанной на рис. 10, имеет вид:

$$p = \frac{t_s}{h(b-a) \sin a} \left[ (b^2 + h^2 - 2bh \cos a) + \frac{b}{a} (a^2 + h^2 - 2ah \cos a) \right]. \quad (9)$$

После дифференцирования (9) по углу  $\alpha$ , найдем, что минимум силы осадки определяется выражением:

$$p_{\min} = 4t_s \operatorname{tg} a \cdot b / (b - a) = 4t_s \operatorname{tg} a / r. \quad (10)$$

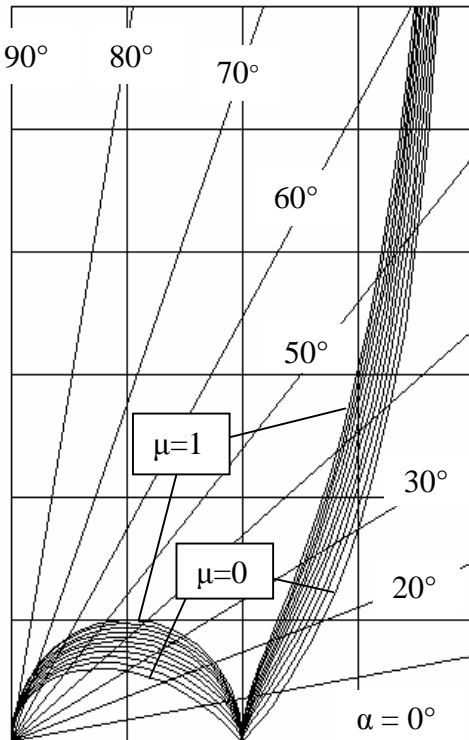


Рис. 8. Семейство гипоциссад

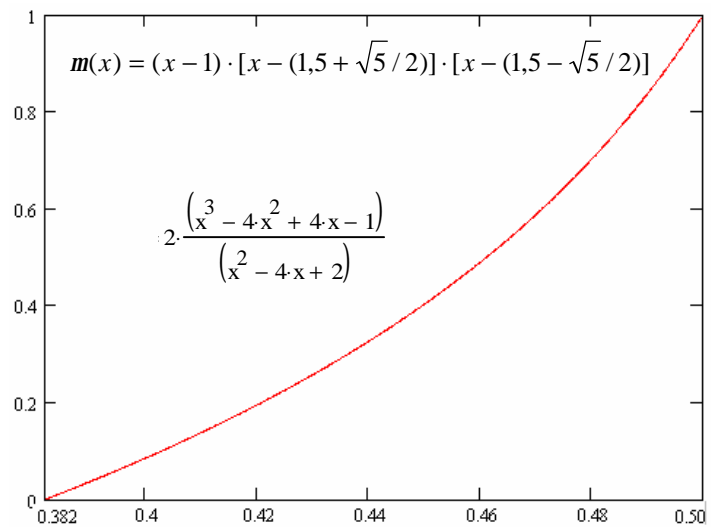


Рис. 9. Максимумы ветвей гипоциссад в зависимости от  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ )

Минимальное значение силы осадки по уравнению (10) легко сопоставимо с результатом (6) предыдущей задачи. Причем геометрические соотношения клина полностью соответствуют условиям, показанным на рис. 11.

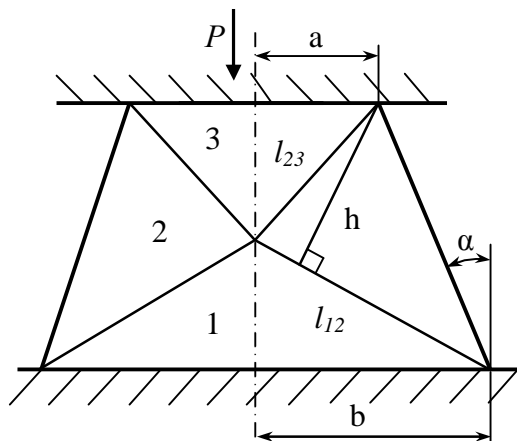


Рис. 10. Расчетная схема осадки клина

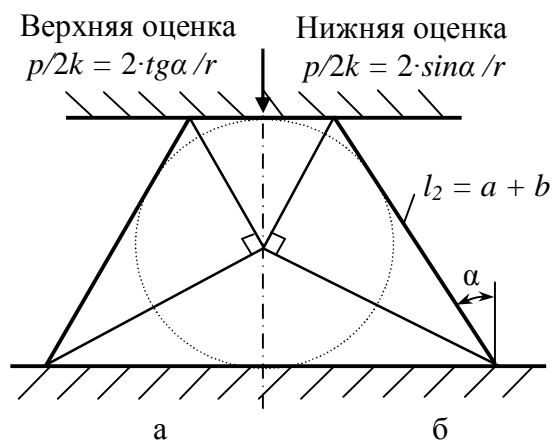


Рис. 11. Оптимальные соотношения клина: а – по МВО; б – по МНО

Для сравнения приведем результаты решения аналогичных задач, полученных МНО и МЛС из работ [1, 2, 5–7].

На рис. 12 представлена схема расчетная процесса деформации полосы в гладкой матрице по методу линий скольжения [2]. В этом случае угол  $\alpha$  и максимальное обжатие  $r$  связаны соотношением  $r = 2 \sin \alpha / (1 + 2 \sin \alpha)$ , а удельная сила:

$$p = 2k(1 + \alpha)r. \quad (11)$$

Вычисленная МЛС [6] удельная сила осадки клина (при идентичных геометрических соотношениях):

$$p = 2k(1 + \alpha). \quad (12)$$

Нетрудно увидеть аналогию выражений (11) и (12) и их взаимную связь, сравнив их с результатами решений этих задач МНО. Соответственно для полосы [2] и клина [6]:

$$p = 2k(1 + \sin \alpha)r;$$

$$p = 2k(1 + \sin \alpha),$$

где  $r = (H-h)/H = b-a/b$ ;  $H$  – начальная толщина полосы;  $h$  – конечная толщина полосы;  $k$  – пластическая постоянная материала.

Отметим, что оптимальные геометрические соотношения, определяемые решениями МНО, полностью соответствуют соотношениям, получаемыми при решении задач МВО (рис. 7, а). Из этого следует, что результаты решений геометрически связаны с одной и той же кривой. При этом соотношение величин  $r$  замкнутого решения задачи МЛС и соответствующих предельных решений оценочными методами определяется среднегармонической величиной от  $H$  и  $h$ .

Геометрическая связь между результатами решения МВО и МЛС при одинаковых углах матрицы показана на рис. 13.

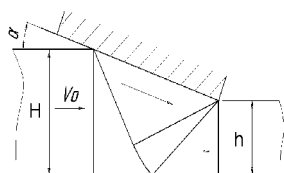


Рис. 12. Схема процесса по МЛС

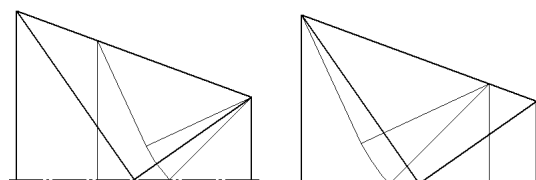


Рис. 13. Сопоставление геометрии матрицы и очага деформации по решениям по МЛС и МВО

Используя это геометрическое соответствие, показанные графические приемы и полученные кривые можно сделать построения, дополняющие известные решения задач о деформации полосы в гладкой матрице и осадке клина, полученные МЛС.

На рис. 9 показаны кривые, связывающие «строфоидное» решение задачи ( $\mu = 0$ ) оценочными методами и методом линий скольжения. Уравнения кривых, изображенных рис. 14, а и 14, б, в полярной системе координат получаются взаимнообратными и имеют вид соответственно:

$$r_H = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + 2 \sin \alpha)}; \quad r_h = \frac{\cos \alpha (1 + 2 \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha}.$$

Применение показанных приемов разрабатываемого графоаналитического метода «энергетической геометрии» [12] к расчетам и анализу процессов деформации позволяет дополнить и уточнить результаты решения задач, полученных известными теоретическими методами расчета процессов пластического формоизменения.

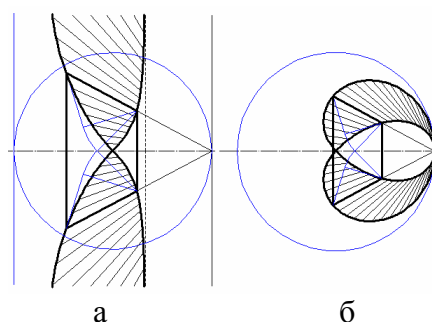


Рис. 14. Кривые, связанные со строфоидой

### ВЫВОДЫ

Графоаналитическими приемами проведено сравнение результатов предельных решений задач плоской деформации по осадке клина и деформированию полосы в клиновой матрице методами линий скольжения, верхней и нижней оценки. Показана взаимосвязь результатов, полученных этими методами, между собой, а также с «золотой» пропорцией, что указывает путь к последовательному сближению верхней и нижней оценки.

Получены новые результаты, дополняющие известные решения. Построены кривые, описывающие геометрию результатов оптимизационного решения рассмотренных задач различными методами математической теории пластичности. Установлено, что существующие пространства оптимальных решений связаны с «золотой» пропорцией. Показано, что оптимальные результаты описываются семейством кривых третьего порядка.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
4. Колмогоров В. Л. Механика обработки давлением / В. Л. Колмогоров. – Екатеринбург : изд-во Уральского государственного технического университета – УПИ, 2001. – 836 с.
5. Джонсон У. Теория пластичности для инженеров / У. Джонсон, П. Меллор; пер. с англ. – М. : Машиностроение, 1979. – 567 с.
6. Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. – М. : Металлургия, 1972. – 408 с.
7. Степанский Л. Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением / Л. Г. Степанский. – М. : Машиностроение, 1979 – 215 с.
8. Теория обработки металлов давлением : учебник для вузов / В. А. Голенков, С. П. Яковлев, С. А. Головин, С. С. Яковлев, В. Д. Кухарь; под ред. В. А. Голенкова, С. П. Яковлева. – М. : Машиностроение, 2009. – 442 с.
9. Ясинский С. А. Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи / С. А. Ясинский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2004. – 239 с.
10. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – Т. 1. – 536 с.
11. Александров А. А. Графо-аналитическая модификация метода верхней оценки / А. А. Александров // Известия ТулГУ. Сер. «Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением». – Тула, ТулГУ. – Вып. 2. – 2004. – С. 51–59.
12. Alexandrov A. A. Graph-analytic Modification of the Method of Upper Estimation (Method of Energetic Geometry) / A. A. Alexandrov, V. V. Evstifeev // Advances in Abrasive Technology VIII: Key Engineering Materials Vols. 291–292 – Trans Tech Publications, Switzerland – (August 2005). – P. 637–642.

Александров А. А. – канд. техн. наук, доц. СибАДИ.

СибАДИ – Сибирская государственная автомобильная дорожная академия, г. Омск, Россия.

E-mail: [omsk-aaa@rambler.ru](mailto:omsk-aaa@rambler.ru)